

Метрические пространства, пересечение открытых и замкнутых множеств, полные метрические пространства, непрерывные отображения

M — метрич. пр-во, if $\forall x, y \in M \exists d(x, y)$ — расстояние:
 1) $d(x, y) \geq 0$,
 $= 0 \Leftrightarrow x = y$;
 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in M$

Открыт. шар с центром в т. $x \in M$ радиуса $R > 0$ наз-ся $B(x, R) = \{y \in M : d(x, y) < R\}$

$G \subset M$ наз-ся **открытым**, if $\forall x \in G \exists B(x, r) \subset G$

III. $x \in M$ — **предельная** т. / мн-ва E , if $\{B(x, r) \setminus \{x\}\} \cap E \neq \emptyset, \forall r > 0$. Мн-во предел. т. E обозн. через E' ; замыканием E наз-ся $\bar{E} = E \cup E'$

Мн-во $F \subset M$ **замкнуто**, if $\bar{F} = F$

Лемма If G — открытое, то $M \setminus G$ — замкн.

If F — замкн., то $M \setminus F$ — откр.

1) $\exists x \in (M \setminus G)' \notin F$, но $x \notin F \Rightarrow x \in G \Rightarrow \exists B(x, r) \subset G$,
 $B(x, r) \cap F = \emptyset$; $\{B(x, r) \setminus \{x\}\} \cap F = \emptyset$; x — не предел.
 $\Rightarrow$ (!?)

2) If F — замкн., $\exists M \setminus F$ — не откр., $\exists x \in G : B(x, r) \not\subset G$,
 $\forall r > 0$; $B(x, r) \cap G \neq \emptyset, \forall r > 0$; $\{B(x, r) \setminus \{x\}\} \cap F \neq \emptyset, \forall r > 0$
 $\Rightarrow x$ — пред. т. $F \Rightarrow x \in F \Rightarrow$ (!?) ■

1) If G_α откр., то $\bigcup_\alpha G_\alpha$ — откр., $\bigcap_{i=1}^N G_i$ — откр.

2) If G_α замкн., то $\bigcap_\alpha G_\alpha$ — замкн., $\bigcup_{i=1}^N G_i$ — замкн.

1) $\bigcup_\alpha G_\alpha = G$. $\forall x \in G \exists G_\alpha : x \in G_\alpha \Rightarrow \exists B(x, r) \subset G_\alpha =$
 $\Rightarrow B(x, r) \subset G$, $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$; $\forall x \in G \Rightarrow x \in G_k, k = 1, \dots, N$,
 $B(x, r_k) \subset G_k, k = 1, \dots, N$; берем $r = \min r_k \Rightarrow B(x, r) \subset G$
 2) $\bigcap_\alpha F_\alpha = M \setminus (\bigcup_\alpha (M \setminus F_\alpha))$, $(M \setminus F_\alpha)$ — откр., $\bigcup_\alpha (M \setminus F_\alpha)$ — откр.
 $\Rightarrow M \setminus (\bigcup_\alpha (M \setminus F_\alpha))$ — замкн. $\bigcup_{k=1}^N F_k = M \setminus (\bigcap_{i=1}^N (M \setminus F_i))$ — и
 аналогично ■

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$, наз-ся **ср-ся** к $x \in M$, if $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

П-ть $\{x_n\}$ наз-ся **фундм.**, if $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N$
 $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon, \forall m=1, 2, \dots$ ($\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$)

Метр. пр-во M наз-ся **полн.**, if $\forall$ фундм.
посл-ть абн-ся ссод-ся

$\exists X, Y$ -метр. пр-ва, $X \xrightarrow{f} Y, y = f(x)$

Отобр. $f: X \rightarrow Y$ наз-ся **непр. в т.** $x \in X$, if $\forall \{x_n\}: x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ // Гейне //

Отобр. $f: X \rightarrow Y$ наз-ся **непр. в т.** $x \in X$, if $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d_x(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$ // Коши //